

Aufgaben Mathezirkel 8-2

Corona Special Edition

Aufgabe 1 Angenommen, eine Krankheit dauert nach der Ansteckung 2 Tage. Während dieser Tage ist der/die Kranke ansteckend, und steckt an jedem Tag der Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 (50%) eine andere Person an.

Zu Beginn ist eine Person erkrankt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des 2. Tages keiner krank ist? Offenbar darf die Person weder am ersten Tag noch am zweiten Tag jemanden anstecken. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0,5 \times 0,5 = 0,25$ oder 25%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des 3. Tages keiner mehr krank ist? Auch hier gibt es den Fall, dass der erste Kranke an beiden Tagen niemanden ansteckt (dann kann es am 3. Tag keinen neuen Kranken geben), aber es gibt auch einen weiteren Fall, nämlich, dass am ersten Tag eine weitere Person angesteckt wird. Dann darf diese aber an beiden Tagen *ihrer* Krankheit niemanden mehr anstecken, und auch die erste Person darf am zweiten Tag keinen anstecken. Die Wahrscheinlichkeit für diesen zweiten Fall ist $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,0625$ – so dass die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des dritten Tages keiner mehr krank ist, die Summe aus beiden Einzelfällen, also $0,25 + 0,0625 = 0,3125$ oder 31,25% ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner mehr erkrankt ist, für den 4. und 5. Tag (Schreibe alle Fälle, die zu diesem Szenario führen können, mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten auf)? Was ist deine Vermutung für die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeit?

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1. Wenn die Ansteckungswahrscheinlichkeit kleiner als 100% ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer großen Anzahl Tagen keiner erkrankt ist, fast 100%.
2. Wenn die Ansteckungswahrscheinlichkeit größer als Null ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer großen Anzahl von Tagen keiner erkrankt ist, fast 0%.
3. Es gibt eine Grenze p_x , so dass für alle Ansteckungswahrscheinlichkeiten größer als p_x die Wahrscheinlichkeit, dass keiner erkrankt ist, nach einer großen Anzahl von Tagen fast 100% ist, und für alle Ansteckungswahrscheinlichkeiten kleiner als p_x die Wahrscheinlichkeit, dass keiner erkrankt ist, nach einer großen Anzahl von Tagen fast 0% ist.
4. Es gibt Ansteckungswahrscheinlichkeiten, für die sich der Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass keiner mehr erkrankt ist, nach einer großen Anzahl von Tagen bei einer Wahrscheinlichkeit zwischen 0% und 100% einpegelt.

Aufgabe 2 Es wird das letzte der berühmten vierzeiligen prophetischen Gedichte des mittelalterlichen Astrologen Nostradamus wiederentdeckt, das dieser angeblich auf seinem Totenbett diktierte:

*Dieses Jahr ist alles Mist,
Flut und Sturm, wie's nur alle 9 Jahr' ist,
Insektenplage wie nur aller 13 Jahr
Pest so schlimm wie nur in 52 Jahren gar!*

Angenommen, Nostradamus hatte recht, wann wird es wieder so ein Katastrophenjahr geben (das Todesjahr von Nostradamus findest du, wie so vieles andere auch, im Internet)?

Auch wenn die Astrologie nicht so verlässlich ist, gibt es tatsächlich manche Insekten wie die Magicicada, die – je nach Art – im Abstand von 13 oder 17 Jahren in großen Mengen auftreten. Warum ist das günstiger als ein massenhaftes Auftreten aller, sagen wir, 12 oder 16 Jahren?

Aufgabe 3 In Sachsen sollen 4000 Schüler auf Corona-Antikörper getestet werden. Der Test-Hersteller macht folgende Angaben: Für Kinder *ohne* Antikörper liefert der Test in ca. 2%, höchstens aber in 5% der Fälle das falsche Ergebnis, für Kinder *mit* Antikörpern sind es 1% bzw. 2%.

Nach der Durchführung der Studie ergeben sich 110 positive Testergebnisse.

Wie schätzt man den *wahren* Anteil des Vorkommens von Antikörpern? Wie ist der Anteil mindestens bzw. höchstens?

Wie wäre das Ergebnis bei 80 bzw. 40 positiven Tests?

.....
Für mich zum Überprüfen der Ergebnisse aus Aufgabe 1:

```
#lang racket
(require math/number-theory)

(define (p-ansick p-cont sick1 sick2 current-p current-day max-day)
  (if (= 0 (+ sick1 sick2))
      0
      (if (= current-day max-day)
          current-p
          (let ((sick-n (+ sick1 sick2)))
            (for/sum ((k (in-range 0 (+ 1 sick-n))))
              (p-ansick p-cont sick2 k
                (* current-p
                  (expt p-cont k)
                  (expt (- 1 p-cont) (- sick-n k))
                  (binomial sick-n k))
                (+ 1 current-day)
                max-day)))))))

(p-ansick 0.5 0 1 1 0 4)
```